Ekvationer & Funktioner

Ekvationer

Ekvationstyp 1: Ekvationer av första graden

När vi löser ekvationer av första graden använder vi oss av de fyra grundläggande räknesätten för att beräkna *x*.

- Vid **minus** tar man **plus**
- Vid **plus** tar man **minus**
- Vid **gånger** tar man **delat med**
- Vid **delat med** tar man **gånger**

Ekvationstyp 2: Andragradsekvationer

Det finns tre olika typer av andragradsekvationer. För varje typ finns det en lösningsmetod.

Fall1 →Roten ur	Fall2 →bryta ut	Fall3 →PQ-formeln
$\boldsymbol{x^2 - 49 = 0}$	$\boldsymbol{x^2 - 8x = 0}$	$\boldsymbol{x^2 - 4x - 5 = 0}$
$x^2 = 49$ $x = \sqrt{49}$ $x = \pm 7$	$x(x-8) = 0$ $\swarrow \quad \searrow$ $x = 0 \quad x - 8 = 0$ $x = 8$	$x = -\frac{(-4)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-5)}$ $x = 2 \pm \sqrt{4+5}$ $x = 2 \pm 3$
$\boldsymbol{x_1 = -7 \quad x_2 = 7}$	$\boldsymbol{x_1 = 0 \quad x_2 = 8}$	$\boldsymbol{x_1 = -1 \quad x_2 = 5}$

Ekvationstyp 3: Allmänna potensekvationer

Vid potensekvationer strävar man efter att få variabelns exponent till 1.

$$x^n = C$$
$$x = C^{1/n}$$

Exempel: Bestäm x om $x^5 = 20$.

$$(x^5)^{1/5} = 20^{1/5}$$
$$x^1 = 20^{1/5}$$

Svar: $x \approx 1{,}82$

Exempel: Bestäm x om $x^{2,4} = 30$.

$$(x^{2,4})^{1/2,4} = 30^{1/2,4}$$

Svar: $x = 30^{1/2,4} \approx 4{,}125$

Ekvationstyp 4: Exponentialekvationer

Exponentialekvationer innebär att vi har variabeln som exponent. För att lösa exponentialekvationer måste man använda logaritmer.

$$a^x = C$$
$$x = \frac{\lg C}{\lg a}$$

Exempel: $1{,}28^{3x} = 5{,}2$

$$\lg 1{,}28^{3x} = \lg 5{,}2$$
$$3x \cdot \lg 1{,}28 = \lg 5{,}2$$
$$x = \frac{\lg 5{,}2}{3 \cdot \lg 1{,}28}$$

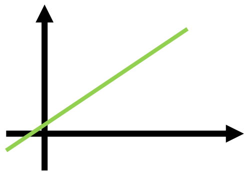
Svar: $x \approx 2{,}23$

Sammanfattning

- **Ekvationer av första graden** – de fyra räknesätten
- **Andragradsekvationer** – roten ur/faktorisera/PQ
- **Allmänna potensekvationer** – höj upp båda sidor med exponentens inverterade värde
- **Exponentialekvationer** – Logaritmera för att få ner *x*.

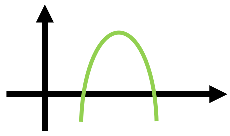
Funktioner

Linjära funktioner

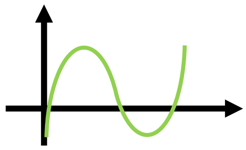


$$y = kx + m$$

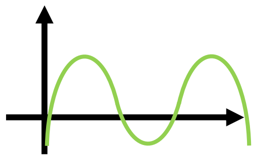
Potensfunktioner



$$y = ax^2 + bx + c$$



$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

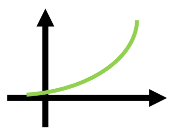
Exponentialfunktioner

Två olika modeller:

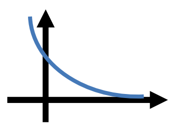
- $y = Ca^x$
- $y = Ce^{kx}$

- $y = värde$
- $C = startvärde$
- $x = tid$
- $a/e^k = förändring$

Växande:



Avtagande:



Begrepp

Begrepp	Betydelse
Kontinuerlig funktion	Sammanhängande funktion
Diskret funktion	Ej sammanhängande funktion
Gränsvärde	När man går väldigt nära en viss punkt eller mot oändligheten.

Derivata

Sekanter & tangenter

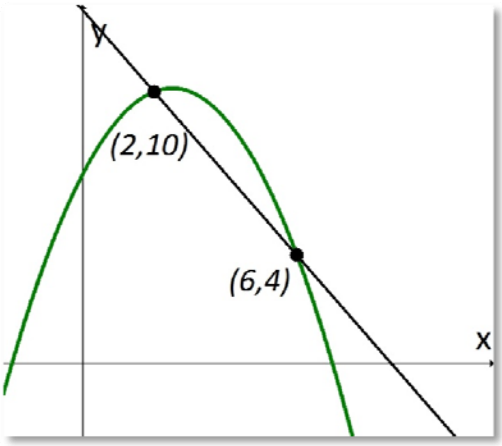
- **En sekant ger medelförändringen mellan två punkter.**
- **En tangent ger lutningen, derivatan, i en punkt.**

Exempel: $f(x) = -0{,}5x^2 + 2{,}5x + 7$

a) Bestäm medellutningen mellan $x = 2$ och $x = 6$.

b) Bestäm lutningen i punkten $x = 5$.

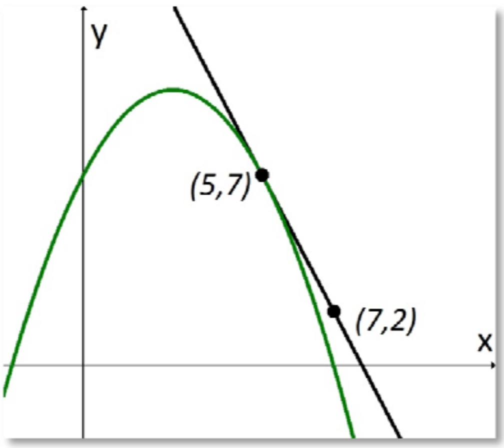
a) För att beräkna medellutningen drar vi en sekant mellan de två punkterna:



Sekantens lutning beräknas:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-10}{6-2} = \frac{-6}{4} = -1{,}5$$

b) För att beräkna lutningen drar vi en tangent till grafen i punkten *x = 5*



Tangentens lutning beräknas:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-7}{7-5} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$$

Svar: **a)** Medellutningen mellan *x = 2* och *x = 6* är $-1{,}5$.

b) Lutningen vid *x = 5* är *− 2,5*.

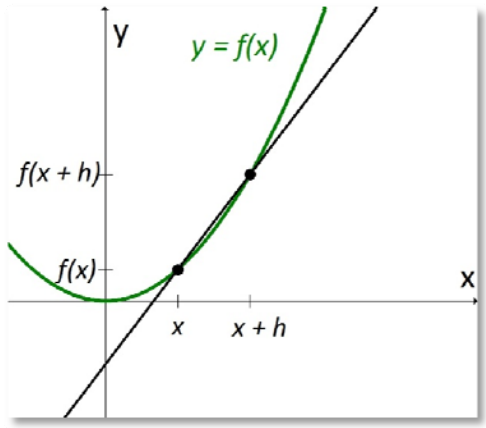
Komihåg:

- För att ta fram en sekant använder vi två punkter på funktionen.
- För att ta fram en tangent drar man en linje som har samma lutning som grafen i just den punkten. Man använder en punkt på funktion och en annan punkt från tangenten.

Derivata

Derivatans definition

Derivatans definition utgår från en sekant mellan två punkter där avståndet mellan punkterna kallas *h*.



När man minskar värdet på h blir avståndet mellan punkterna mindre och mindre. Om man gör h oändligt litet hamnar punkterna oändligt nära varandra, och resultat blir att man får fram lutningen i en punkt.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Med derivatans definition kan vi ta fram en funktion som beskriver lutningen i varje punkt.

Exempel: Derivera $f(x) = 2x^2 + x$ med derivatans definition.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2(x+h)^2 + x + h) - (2x^2 + x)}{h} =$$

$$= \frac{(2x^2 + 4xh + 2h^2 + x + h) - (2x^2 + x)}{h} =$$

$$= \frac{4xh + h + 2h^2}{h} = \frac{h(4x + 1 + 2h)}{h} = 4x + 1 + 2h$$

Svar: $f'(x) = \lim_{h \to 0} 4x + 1$

Deriveringsregler

Vi kan ta fram en funktion som beskriver hur grafen förändras med hjälp av deriveringsreglerna.

Regler		Exempel	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$2x^3$	$6x^2$
$C \cdot a^x$	$C \cdot \ln a \cdot a^x$	$4 \cdot 1{,}05^x$	$4 \cdot \ln 1{,}05 \cdot 1{,}05^x$
$C \cdot e^{kx}$	$k \cdot C \cdot e^{kx}$	$20e^{-0{,}5x}$	$-10 \cdot e^{-0{,}5x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$10 \ln x$	$\frac{10}{x}$

Komihåg:

- Derivata = lutningen i en punkt = $f'(x)$
- Derivatan av en *x*-term = talet framför *x-et*.
- Derivatan av ett tal = 0
- Derivera olika termer var för sig.

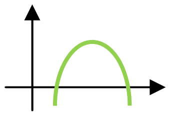
Extrempunkter

Extrempunkter

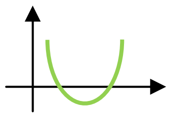
Det finns tre olika typer av extrempunkter. För alla extrempunkter gäller att derivatan är noll.

- $f'(x) = 0 \rightarrow$ *Extrempunkt*

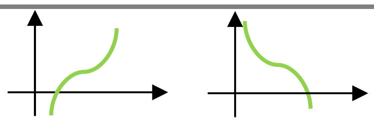
Maximipunkt



Minimipunkt



Terrasspunkt



Teckenschema

När man ska bestämma typ av extrempunkt för en funktion gör man ett *teckenschema/teckenstudie.*

Exempel: Bestäm extrempunkterna för funktionen $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x$ har extrempunkter samt vad för sorts extrempunkter det är.

1. Vi deriverar med deriveringsreglerna:

$f'(x) = -x^2 + 6x - 8$

2. Vi sätter $f'(x) = 0$ och löser ekvationen:

$0 = -x^2 + 6x - 8$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8x} = 3 \pm 1$

$\boldsymbol{x_1 = 2}$ $\boldsymbol{x_2 = 4}$

3. Vi gör ett teckenschema för att se vad det är för typer av extrempunkter:

$\boldsymbol{x}$	1	**2**	3	**4**	5
$\boldsymbol{f'(x)}$	–	**0**	+	**0**	–
$\boldsymbol{f(x)}$	↘	→	↗	→	↘

4. Vi beräknar y-värdena i punkterna.

$$f(2) = -\frac{2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 \approx -6{,}7$$

$$f(4) = -\frac{4^3}{3} + 3 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 \approx -5{,}3$$

Svar: Funktionen har en minimipunkt vid $(2;\ -6{,}7)$ och en maximipunkt vid $(4;\ -5{,}3)$.

Andraderivata

Andraderivatan beskriver hur derivatan förändras.

Bestämning av extrempunkter

Funktionen $f(x)$ har en extrempunkt där $f'(x) = 0$. Med andraderivatan kan bestämma vilken typ av extrempunkt det är:

- $f''(x) > 0 \rightarrow minimipunkt$
- $f''(x) < 0 \rightarrow maximipunkt$

Obs! Om $f''(x) = 0$ måste man göra ett teckenschema för att bestämma typen av extrempunkt.

Exempel: Bestäm extrempunkter till funktionen $f(x) = e^{0,5x} - 2x$ med hjälp av andraderivata.

1. **Derivera**
   $f'(x) = 0{,}5e^{0,5x} - 2$

2. $\boldsymbol{f'(x) = 0}$
   $0{,}5e^{0,5x} - 2 = 0$
   $0{,}5e^{0,5x} = 2$
   $e^{0,5x} = 4$
   $0{,}5x = \ln 4$
   $x = \frac{\ln 4}{0{,}5} \approx 2{,}8$

3. **Kontrollera typ av extrempunkt med $f''(x)$**
   $f''(x) = 0{,}25e^{0,5x}$
   $f''(\mathbf{2{,}8}) = 0{,}25e^{0,5 \cdot \mathbf{2{,}8}} \approx 1 > 0 \rightarrow$ Buktar upp
   → Minimipunkt

4. **Ta fram y-värde**
   $f(x) = e^{0,5x} - 2x$
   $f(\mathbf{2{,}8}) = e^{0,5 \cdot \mathbf{2{,}8}} - 2 \cdot \mathbf{2{,}8} \approx -1{,}5$

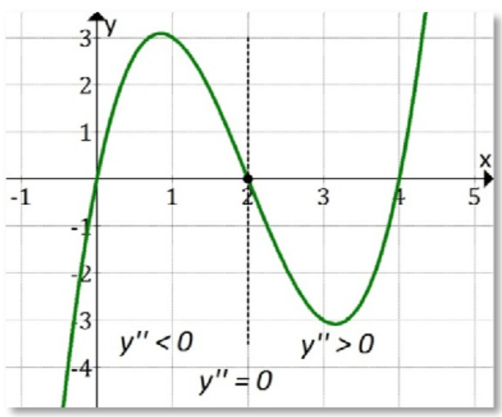
Svar: Minimipunkt vid $(2{,}8;\ -1{,}5)$

Konkavitet

En grafs konkavitet innebär hur den buktar. Förhållandet mellan en grafs konkavitet och andraderivata är:

- $f''(x) > 0 \rightarrow konkav\ uppåt$
- $f''(x) < 0 \rightarrow konkav\ nedåt$
- $f''(x) = 0 \rightarrow byter\ konkavitet$

Förhållandet illustreras i figuren nedan.



Den punkten där grafen byter konkavitet kallas för **inflexionspunkt**. En inflexionspunkt har kriteriet att andraderivatan är noll men att derivatan inte är noll.

- $f''(x) = 0$ *och* $f'(x) \neq 0 \rightarrow$ inflexionspunkt

Integraler

Primitiva funktioner

En funktion $F(x)$ kallas för en primitiv funktion till $f(x)$ om $F'(x) = f(x)$.

En primitivfunktion tas fram genom att tillämpa s.k. baklängesderivata.

Regler

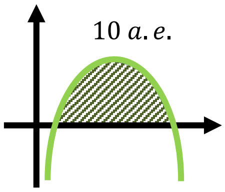
$f(x)$	$F(x)$
k	$kx + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$

Integraler

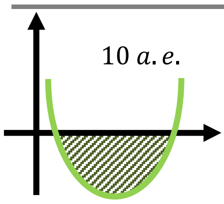
Integraler och areor

En integral innebär *summan av funktionsvärden*. Integralens värde är samma som arean under grafen så länge grafen är över x-axeln. När grafen går under x-axeln uppstår en skillnad mellan integralens värde och arean.

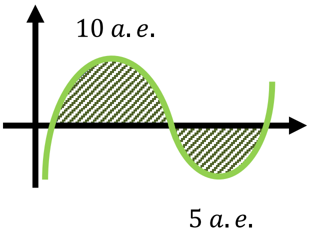
Integral	Area
Kan vara positiv, negativ eller noll.	Kan vara positiv eller noll.
Ingen enhet	Areaenheter (a.e.)



Area: $10\ a.e.$
Integral: 10



Area: $10\ a.e.$
Integral: -10

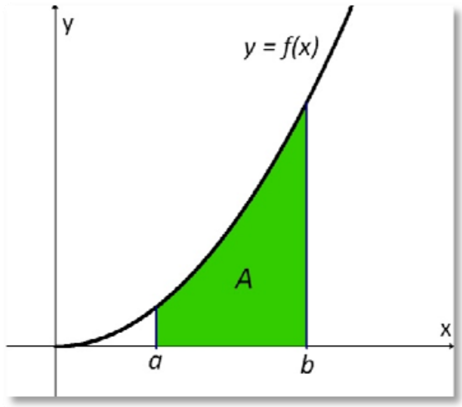


Area: $10 + 5 = 15\ a.e.$
Integral: $10 - 5 = 5$

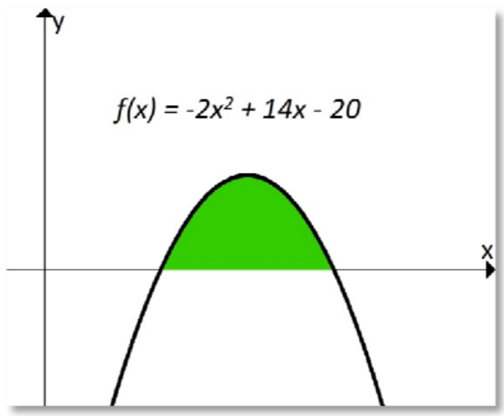
Beräkningar

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = [\boldsymbol{F(x)}]_a^b = \boldsymbol{F(b)} - \boldsymbol{F(a)}$$

där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$.



Exempel: Bestäm det markerade området nedan.



1. Ta reda på gränsvärdena.

$f(x) = -2x^2 + 14x - 20 = 0$

$-2x^2 + 14x - 20 = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x = 3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 - 10}$

$x = 3{,}5 \pm 1{,}5 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$

2. Ställ upp och använd formeln.

$$\int_2^5 (-2x^2 + 14x - 20)\,dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 7x^2 - 20x\right]_2^5 =$$

$$= \left(-\frac{2\cdot 5^3}{3} + 7\cdot 5^2 - 20\cdot 5\right) - \left(-\frac{2\cdot 2^3}{3} + 7\cdot 2^2 - 20\cdot 2\right)$$

$= (-8{,}33) - (-17{,}33) = -8{,}33 + 17{,}33 =$

$= \mathbf{9}$

Svar: 9

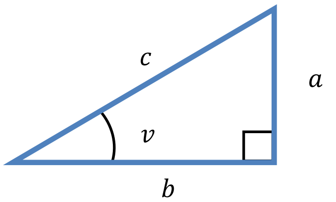
Trigonometri

Trigonometri

Definitioner

För en rätvinklig triangel gäller följande:

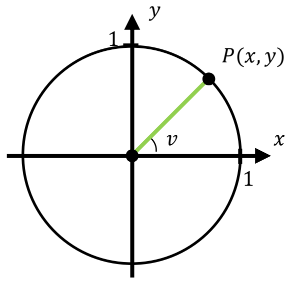
- $\sin v = \frac{motstående\ katet}{hypotenusan} = \frac{a}{c}$
- $\cos v = \frac{närliggande\ katet}{hypotenusan} = \frac{b}{c}$
- $\tan v = \frac{motstående\ katet}{närliggande\ katet} = \frac{a}{b}$



Enhetscirkeln

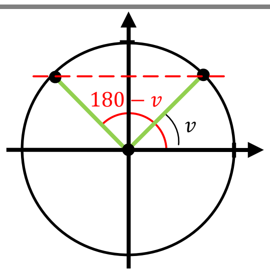
I enhetscirkeln kan en punkts koordinater uttryckas med sinus och cosinus.

- $\cos v = x$
- $\sin v = y$
- $\tan v = \frac{y}{x} = \frac{\sin v}{\cos v}$

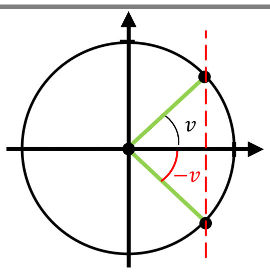


Samband

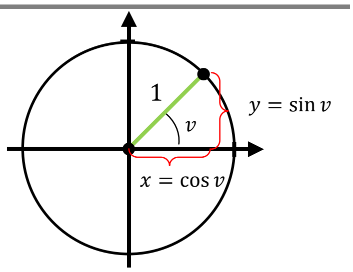
$$\begin{cases} \sin(180 - v) = \sin v \\ \cos(180 - v) = -\cos v \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin(-v) = -\sin v \\ \cos(-v) = \cos v \end{cases}$$



$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

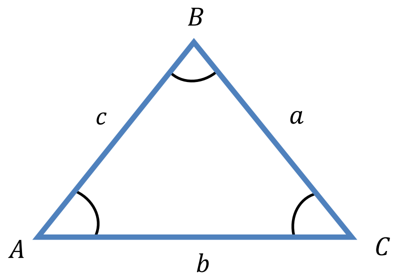


Pythagoras sats: $x^2 + y^2 = 1$

Triangelsatser

Formler

- Areasatsen: $T = \frac{b \cdot c \cdot \text{Sin } A}{2}$
- Sinussatsen: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- Cosinussatsen: $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos C$



Två lösningar

Sinussatsen & Triangelsatsen

När man arbetar med sinus så måste man alltid räkna med att det **kan finnas** två lösningar, då man kan få **två olika vinklar**. Detta eftersom $\sin v = \sin(180 - v)$.

Det finns inte två lösningar om:

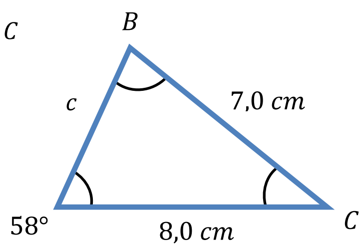
- Vinkelsumman > 180°
- Alla sidor är kända

Cossinussatsen

När man arbetar med cos finns det ingen möjlighet att man får fram två olika vinklar. Däremot kan det när man använder *cossinussatsen* bli en andragradsekvation med två rötter. Detta innebär att det i så fall finns två möjliga trianglar.

Exempel

Beräkna vinkel C



Vi kan här inte räkna ut vinkel C direkt, utan får börja med att räkna ut vinkel B.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{8{,}0 \cdot \sin 58}{7{,}0}$$

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{8{,}0 \cdot \sin 58}{7{,}0}\right) = 75{,}7°$$

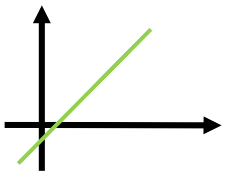
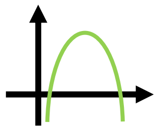
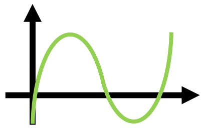
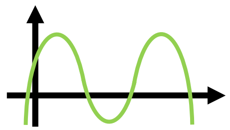
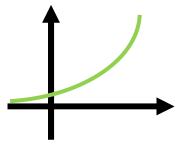
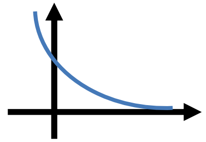
$$B_1 = 75{,}7° \qquad B_2 = 180° - 75{,}7° = 104{,}3°$$

$$C = 180° - A - B$$

$$C_1 = 180° - 58° - 75{,}7° = 46{,}3°$$

$$C_2 = 180° - 58° - 104{,}3° = 17{,}7°$$

Svar: Vinkel C kan vara 46,3° eller 17,7°.

Typ	Linjära funktioner	Potensfunktioner	Exponentialfunktioner	
Förklaring	**x upphöjt med 1 *(ingen exponent)*.**	**x upphöjt med vilket tal som helst.**	**x som exponent.**	
Allmän formel	$\boxed{y = kx + m}$	**Andragradsfunktion:** $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ **Tredjegradsfunktion:** $\boxed{y = ax^3 + bx^2 + cx + d}$ **Fjärdegradsfunktion:** $\boxed{y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$ ***Osv…***	$\boxed{y = Ca^x}$ $\boxed{y = Ce^{kx}}$ • $y = värde$ • $C = startvärde$ • $x = tid$ • $a/e^k = förändring$	
Utseende		  		
Derivata	$f(x) = kx + m$ $f'(x) = k$	$f(x) = x^n$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = Ca^x$ $f'(x) = \ln a \cdot Ca^x$	$f(x) = Ce^{kx}$ $f'(x) = kCe^{kx}$
Primitiv funktion	$f(x) = kx + m$ $F(x) = \frac{kx^2}{2} + mx + C$	$f(x) = x^n$ $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$f(x) = a^x$ $F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$f(x) = e^{kx}$ $F(x) = \frac{e^{kx}}{k} + C$